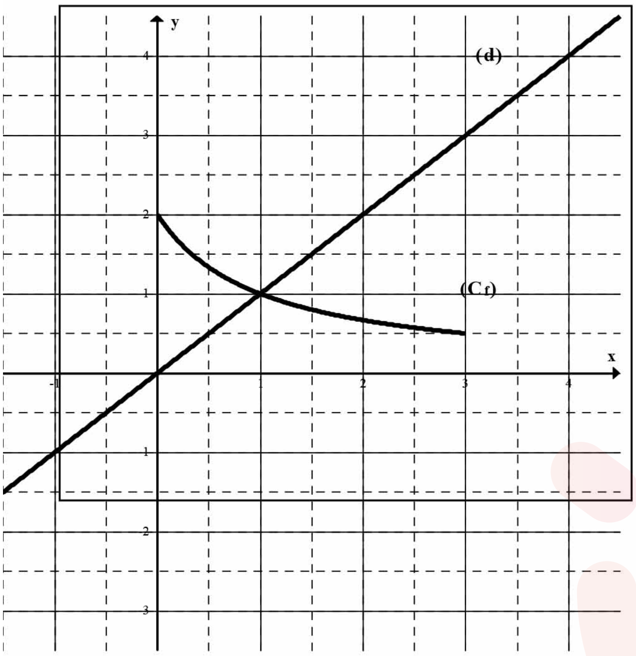
التمرين الأول: (4,5 نقط)

في الشكل المقابل (C_f) هو التمثيل البياني للدالة المعرفة على المجال $[0 \ , \ 3]$ بـ:

$f(x) = \frac{2}{x+1}$ و (d) المستقيم ذو المعادلة $y = x$



1 (U_n)متتالية عددية معرفة بحدها الأول : $U_0 = 3$

ومن أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1} = f(U_n)$

أ/ مثل الحدود U_0 ، U_1 ، U_2، U_3، U_4، U_5 و U_6 على حامل محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل (وذلك في الوثيقة المرفقة)

ب/ ضع تخمينا حول رتابة المتتالية (U_n) وتقاربها

جـ/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_{2n}) و المتتالية (U_{2n+1})

2 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq U_n \leq 3$

(V_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 2}$

أ بين أن (V_n) متتالية هندسية أساسها $\left(-\frac{1}{2}\right)$ وعين حدّها الأول

ب أكتب V_n بدلالة n ، ثم استنتج U_n بدلالة n

جـ احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ وماذا تستنتج ؟

التمرين الثاني: (4,5 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z الآتية : $(Z - 4 - 2i)(Z^2 - 2Z + 2) = 0$

2) في المستوي المركب المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{U}, \vec{V})$ نعتبر النقط A ،B وC التي لواحقها :

$Z_A = 1 + i$ ، $Z_B = 4 + 2i$ و $Z_C = \frac{9}{2} + \frac{1}{2}i$ على الترتيب

.1 بين أن : $\frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B} = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}}$

.2 استنتج طبيعة المثلث BAC ثم احسب مساحته

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه B ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

أ/ عين الكتابة المركبة للتشابه S

ب/ عين Z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالتشابه S

جـ/ بين أن صورة المثلث BAC بالتشابه S هو المثلث BCD، ثم استنتج مساحة المثلث BCD

4) لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MD} = 0$

أ/ عين طبيعة المجموعة (E) وحدد عناصرها المميزة

ب/ تحقق أن النقطة C تنتمي إلى المجموعة (E) ثم استنتج طبيعة المثلث ACD

Nafouz

التمرين الثالث :(04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط : $A(-3,3,2)$، $B(-2,1,0)$ $E(0,0,2)$ و $F(0,3,-1)$ و (p) المستوي الذي $2x+2y-z+2=0$ ، معادلة ديكارتية له

و (Q) المستوي المعرف بالتمثيل الوسيطي : $(Q) : \begin{cases} x=\alpha+\beta \\ y=4\alpha-2\beta+1 \\ z=\alpha-2\beta-2 \end{cases}$ حيث α و β عددان حقيقيان

1. أ/ اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)
   ب/ أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q)
   ج/ تحقق أن المستويين (p) و (Q) متعامدان ويتقاطعان وفق المستقيم (AB)
2. أ عين المركز C ونصف القطر r لسطح الكرة (S) الذي يمس كل من المستويين (p) و (Q) في النقطتين E و F على الترتيب
   ب استنتج بعد النقطة C عن كل من المستويين (p) و (Q)
3. **a**/ تحقق أن المثلث ABC قائم في النقطة B ثم احسب مساحته
   b/ بين أن $\overrightarrow{EF}$ عمودي على المستوي (ABC)
   c/ احسب حجمي رباعيي الوجوه $ABCE$ و $ABCF$

التمرين الرابع: (07 نقط)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x-\frac{1}{x}-2lnx$

1. احسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة
2. ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها على المجال $]0,+\infty[$
3. احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

II) لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x+\frac{1}{x}-2-(lnx)^2$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1. أ/ اثبت ان : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(lnx)^2}{x}=0$ (مساعدة : نضع $t=\sqrt{x}$)

ب/ استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2. 1 تحقق ان : $f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$ ثم احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}f(x)$

2 اعط تفسيرا بيانيا للنتائج

3. بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0,+\infty[$: $f'(x)=g(x)\times\frac{1}{x}$

4. استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها

5. ارسم المنحنى (C_f)

6. أ/ اثبت أن: $x\longmapsto xlnx-x$ ، هي دالة أصلية للدالة : $x\longmapsto lnx$ على المجال $]0,+\infty[$

ب/ باستعمال المكاملة بالتجزئة تحقق أن : $\int_1^e(lnx)^2\,dx=e-2$

ج/ احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما :

$x=e$ و $x=1$

Nafouz

التمرين الأول :(04 نقط)

1 أ/ اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB):

$(AB): \overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$ ومنه : $(t \in \mathcal{R})$ ، $(AB): \begin{cases} x = t - 3 \\ y = -2t + 3 \\ z = -2t + 2 \end{cases}$

ب/ أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q):

لدينا : $\begin{cases} x = \alpha + \beta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ y = 4\alpha - 2\beta + 1 \cdots\cdots\cdots (2) \\ z = \alpha - 2\beta - 2 \cdots\cdots\cdots (3) \end{cases}$: من $((1) - (3))$ نجد $\beta = \frac{x-z-2}{3}$

ومن (1) نجد: $\alpha = x - \beta = \frac{2x+z+2}{3}$ وبالتعويض في (2) نجد: $(Q): \ 2x - y + 2z + 5 = 0$

ج/ تحقق أن المستويين (p) و (Q) متعامدان ويتقاطعان وفق المستقيم (AB):

$\vec{n}_p . \vec{n}_Q = 0$ اذن : $\vec{n}_p \perp \vec{n}_Q$ ومنه المستويين (p) و (Q) متعامدان

$(AB) \in (p) : 2(t-3) + 2(-2t+3) - (-2t+2) + 2 = 0$ اي $0 = 0$

$(\Delta) \in (Q) : 2(t-3) - (-2t+3) + 2(-2t+2) + 5 = 0$ اي $0 = 0$

2 أ عين المركز C ونصف القطر r لسطح الكرة (S) الذي يمس كل من المستويين (p) و (Q) في النقطتين E و F على الترتيب

المركز C هو نقطة تقاطع المستقيمين (CE) و (CF) ومنه : $\begin{cases} (CE): \overrightarrow{EM} = t\vec{n}_p \\ (CF): \overrightarrow{FM} = \lambda\vec{n}_Q \end{cases}$

إذن : $(t \in \mathcal{R})$ ، $(CE): \begin{cases} x = 2t \\ y = 2t \\ z = -t + 2 \end{cases}$

و $(\lambda \in \mathcal{R})$ ، $(CF): \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda + 3 \\ z = 2\lambda - 1 \end{cases}$

$(CE) \cap (CF)$ يعني أن : $\begin{cases} 2t = 2\lambda \\ 2t = -\lambda + 3 \\ -t + 2 = 2\lambda - 1 \end{cases}$

ومنه $t = \lambda = 1$ أي : $C(2, 2, 1)$ ونصف القطر $r = CE = \sqrt{(0-2)^2 + (0-2)^2 + (2-1)^2} = 3$

ب استنتج بعد النقطة C عن كل من المستويين (p) و (Q):

المسافة بين C والمستويين (p) و (Q) هي: $CE = CF = r = 3$

3 a/ تحقق أن المثلث ABC قائم في النقطة B ثم احسب مساحته

لدينا: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 0$ أي $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ ومنه المثلث ABC قائم في النقطة B

إذن: $S_{ABC} = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{3 \times 3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ (و.م)^2

Nafouz

b/ بين أن $\overrightarrow{EF}$ عمودي على المستوي (ABC): $\begin{cases} \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{AB}=0 \\ \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{BC}=0 \end{cases}$ أي: $\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\3\\-3\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ و $\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\3\\-3\end{pmatrix}=\mathbf{0}$

c/ احسب حجمي رباعيي الوجوه $ABCE$ و $ABCF$:

$V_{ABCE}=\frac{1}{3}\,S_{ABC}\times EI$.

و $V_{ABCF}=\frac{1}{3}\,S_{ABC}\times FI$ حيث I منتصف $[EF]$

إذن : $V_{ABCE}=\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{2}}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{9}{2}\ (U.V)$

و $V_{ABCF}=\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{2}}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{9}{2}\ (U.V)$

<u>ملاحظة:</u> يمكن حساب حجمي رباعيي الوجوه $ABCE$ و $ABCF$ باعتبار ان : الارتفاع هو CE و CF والقاعدة هي المثلث ABE و ABF على الترتيب

<u>التمرين الثاني :</u>(4,5 نقط):

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z الآتية : $(Z-4-2i)(Z^2-2Z+2)=0$

$\begin{cases} Z-4-2i=0 \\ Z^2-2Z+2=0 \end{cases}$ أي: $\begin{cases} Z=4+2i \\ Z^2-2Z+2=0 \end{cases}$

$Z^2-2Z+2=0$ نحسب المميز Δ نجد : $\Delta=-4=4i^2$ ومنه $Z_1=1+i$ و $Z_2=1-i$

ومنه مجموعة حلول المعادلة : $S=\{4+2i,\ 1+i,1-i\ \}$

2) أ/ بين أن : $\frac{Z_C-Z_B}{Z_A-Z_B}=\frac{1}{2}\,e^{i\frac{\pi}{2}}$: $\frac{Z_C-Z_B}{Z_A-Z_B}=\frac{1}{2}i=\frac{1}{2}\,e^{i\frac{\pi}{2}}$

ب/ استنتج طبيعة المثلث BAC ثم احسب مساحته

المثلث BAC قائم في B ومساحته : $S_{BAC}=\frac{AB\times BC}{2}=\frac{\sqrt{10}\times\sqrt{\frac{10}{4}}}{2}=\frac{10}{4}\ (\text{و.م})^2$

3) أ/ عين الكتابة المركبة للتشابه S :

لدينا: $\frac{Z_C-Z_B}{Z_A-Z_B}=\frac{1}{2}i$ أي : $(z_C-z_B)=\frac{1}{2}i(z_A-z_B)$ وبعد التبسيط نجد : $Z_C=\frac{1}{2}i\,Z_A+5$

إذن العبارة المركبة للتشابه S هي : $Z'=\frac{1}{2}i\,Z+5$

ب/ عين Z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالتشابه S

$$Z_D=\frac{1}{2}i\,Z_C+5=\frac{19}{4}+i\frac{9}{4}$$

جـ/ بين أن صورة المثلث BAC بالتشابه S هو المثلث BCD ثم استنتج مساحة المثلث BCD

S تشابه مركزه B ونسبته $\frac{1}{2}$ ويحول A إلى C ويحول C إلى D ومنه صورة المثلث BAC بالتشابه S هو المثلث BCD

$$S_{BCD}=\frac{CB\times BD}{2}=\frac{\frac{1}{2}AB\times\frac{1}{2}BC}{2}=\frac{\frac{1}{4}AB\times BC}{2}=\frac{S_{BAC}}{4}=\frac{10}{16}\ (\text{و.م})^2$$

4) أ/عين طبيعة المجموعة (E) وحدد عناصرها المميزة:

(E) هي دائرة قطرها AD أي : $(E): (x - x_A)(x - x_D) + (y - y_A)(y - y_D) = 0$

ومنه : $(E): x^2 + y^2 - \frac{23}{4}x - \frac{13}{4}y + 7 = 0$ وبالتالي هي دائرة مركزها $G\left(\frac{23}{8} ; \frac{13}{4}\right)$ ونصف قطرها $\sqrt{7}$

ب/تحقق أن النقطة C تنتمي إلى المجموعة (E) ثم استنتج طبيعة المثلث ACD

$C \in (E) : \left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{23}{4}\left(\frac{9}{2}\right) - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{2}\right) + 7 = 0$ اي $0 = 0$

ومنه المثلث ACD قائم في النقطة C

التمرين الثالث:(4,5 نقط):

نعتبر المتتالية (u_n):
$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = f(U_n) = \frac{2}{U_n+1} \end{cases}$$

1 أ/ تمثيل الحدود U_0 . U_1 ، U_2، U_3، U_4، U_5 و U_6 على حامل محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل

ب/ ضع تخمينا حول رتابة المتتالية (U_n) وتقاربها

(U_n) متتالية غير رتيبة وهي متقاربة نحو العدد 1

جـ/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_{2n}) و المتتالية (U_{2n+1})

من التمثيل نستنتج **أن** المتتالية (U_{2n}) متتالية متناقصة والمتتالية (U_{2n+1}) متتالية متزايدة

2 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le U_n \le 3$

من اجل $n = 0$: $0 \le U_0 \le 3$ أي $0 \le 3 \le 3$ القضية صحيحة

نفرض أن $0 \le U_n \le 3$ ونثبت صحة القضية $0 \le U_{n+1} \le 3$

لدينا : $0 \le U_n \le 3$ ، وبإضافة العدد 1 إلى الطرفين نجد: $1 \le U_n + 1 \le 4$ وبقلب طرفي المتباينة وضرب الطرفين

في (2) نجد : $\frac{2}{4} \le \frac{2}{U_n+1} \le 1$ أي $\frac{1}{2} \le U_{n+1} \le 1$ ومنه : $0 \le U_{n+1} \le 3$

إذن من اجل كل عدد طبيعي n فإن : $0 \le U_n \le 3$

3 أ- بين أن (V_n) متتالية هندسية أساسها $\left(-\frac{1}{2}\right)$ يطلب تعيين حدّها الأول

لدينا $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 2}$ ومنه $V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 1}{U_{n+1} + 2}$

أي $V_{n+1} = \frac{\frac{2}{U_n+1} - 1}{\frac{2}{U_n+1} + 2}$ إذن : $V_{n+1} = \frac{-U_n + 1}{2U_n + 4}$

وبأخذ $\left(\frac{-1}{2}\right)$ عامل مشترك نجد : $V_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{U_n - 1}{U_n + 2}\right)$ أي $V_{n+1} = -\frac{1}{2}V_n$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\left(q = -\frac{1}{2}\right)$ وحدها الأول: $V_0 = \frac{U_0 - 1}{U_0 + 2} = \frac{2}{5}$

ب - أكتب V_n بدلالة n ، ثم استنتج U_n بدلالة n

$V_n = \frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ ومن العبارة $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 2}$ نجد: $U_n = \frac{2V_n - 1}{V_n - 1}$

إذن : $U_n = \frac{\frac{4}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{2}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1}$

ج- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ وماذا تستنتج ؟: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{4}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{2}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1} = \frac{-1}{-1} = 1$

ومنه نستنتج أن : (U_n) متتالية متقاربة نحو العدد 1

التمرين الرابع:(07 نقط):

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي: $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2lnx$

1- احسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة:

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[x\left(1 - \frac{1}{x^2} - 2\frac{lnx}{x}\right)\right] = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = \frac{x^2 - 1 - 2xlnx}{x} = -\infty$

2- ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها على المجال $]0,+\infty[$:

$g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{(x-1)^2}{x^2}$ إذن $g'(x) = 0$ أي : $x = 1$

لدينا من اجل كل $x \epsilon\,]0\,,+\infty[$ فإن $g'(x) > 0$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على $]0\,,+\infty[$

- جدول تغيرات الدالة g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↗			$-\infty$

3- احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

$g(1) = 0$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	-	0	$+$	

(II لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي: $f(x) = x + \frac{1}{x} - 2 - (lnx)^2$

1- أ/ اثبت ان : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(lnx)^2}{x} = 0$: ، (مساعدة : نضع $t = \sqrt{x}$)

نضع : $t = \sqrt{x}$ اي : $t^2 = x$ ومنه لما $x \to +\infty$ فإن : $t \to +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(lnx)^2}{x} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\left(lnt^2\right)^2}{t^2} = \lim\limits_{t\to+\infty} \left(\frac{2lnt}{t}\right)^2 = 0$

ب/ استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[x\left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} - \frac{(lnx)^2}{x}\right)\right] = +\infty$

2 1 تحقق ان : $f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$ ، ثم احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{1}{x}}-2-\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2=f(x)$$

نضع : $t=\frac{1}{x}$ ومنه لما $x\xrightarrow{>}0$ فإن : $t\to+\infty$ اذن:

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0} f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to+\infty} f(t)=+\infty$$

2 اعط تفسيرا بيانيا للنتائج : $x=0$ معادلة لمستقيم مقارب عمودي

3 بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0,+\infty[$: $f'(x)=g(x)\times\frac{1}{x}$

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}-2\frac{\ln x}{x}=g(x)\times\frac{1}{x}$$

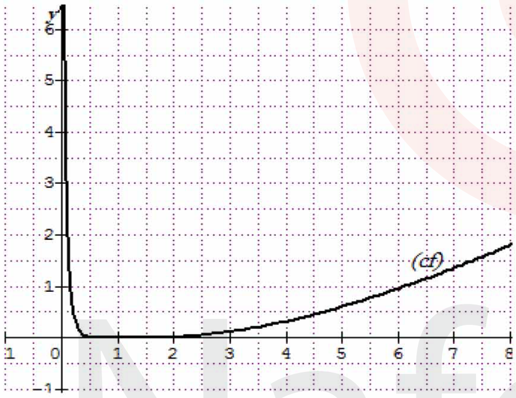
4 استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها:

ومنه من اجل كل $x\in\,]0\,,+\infty[$ فإن

اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	-	

5 ارسم المنحنى (C_f)



6 أ/ اثبت أن: $x\longmapsto x\ln x-x$ ، هي دالة أصلية للدالة : $x\longmapsto \ln x$ على المجال $]0,+\infty[$:

$$(x\ln x-x)'=\ln x+x\times\frac{1}{x}-1=\ln x$$

ب/ باستعمال المكاملة بالتجزئة تحقق أن : $\int_1^e(\ln x)^2\,dx=e-2$:

نضع: $\begin{cases}u(x)=(\ln x)^2\\ v'(x)=1\end{cases}$ نجد : $\begin{cases}u'(x)=2\frac{\ln x}{x}\\ v(x)=x\end{cases}$ اذن:

$$\int_1^e(\ln x)^2\,dx=[x(\ln x)^2]_1^e-\int_1^e x2\frac{\ln x}{x}\,dx=[x(\ln x)^2]_1^e-2\,[x\ln x-x]_1^e=e-2$$

ج/ احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=e$

مساحة الحيز هي : $\int_1^e f(x)\,dx=\int_1^e\left[x+\frac{1}{x}-2-(\ln x)^2\right]dx=\int_1^e\left(x+\frac{1}{x}-2\right)dx-\int_1^e(\ln x)^2dx$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2+\ln|x|-2x\right]_1^e-(e-2)=\frac{1}{2}e^2-3e+\frac{9}{2}=\frac{(e-3)^2}{2}$$ و.م